

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
математического анализа
С.А Шабров



25.05.2023

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.34 Дополнительные главы математического анализа

- 1. Шифр и наименование направления подготовки/специальности:**
01.03.04 Прикладная математика
- 2. Профиль подготовки/специализации/магистерская программа:**
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра математического анализа
- 6. Составители программы:**
Давыдова Майя Борисовна, к.ф.-м. н., доцент
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, 25.05.2023, протокол №0500-06
- 8. Учебный год:** 2024/2025 **Семестр(-ы):** 2,3

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью освоения дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» является изложение следующих тем: интегралы высшей кратности, криволинейные интегралы и интегралы по поверхности, понятие о дифференциальных формах и их интегрирование, приложения математического анализа в других разделах математики и в других науках.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» является логическим продолжением курса «Математический анализ». Изучаемый в курсе материал используется в качестве основного математического аппарата в таких курсах как «функциональный анализ», «комплексный анализ», «дифференциальные уравнения», «уравнения с частными производными», «методы оптимизации», «математическая статистика», различных курсах, связанных с геометрией. Уверенное владение основными понятиями анализа требуется и при изучении большинства других курсов. Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения математических и естественнонаучных дисциплинах, модулях и практиках.

Знания могут быть использованы при продолжении образования в аспирантуре и в дальнейшей трудовой деятельности выпускников.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования	ОПК-2.1	Владеет навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач	Знать: математические методы и модели. Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей. Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач
		ОПК-2.2	Осуществляет проверку адекватности математических моделей	Знать: математические методы и модели. Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей.

				Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач
		ОПК-2.3	Анализирует результаты и оценивает надежность и качество функционирования систем	Знать: математические методы и модели. Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей. Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 5/180

Форма промежуточной аттестации зачет.

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы	Всего		
		2 сем.	3 сем.
Аудиторные занятия	66	32	34
в том числе:	16	16	
лекции			
практические	34		34
лабораторные	16	16	
Самостоятельная работа	114	76	38
Итого:	180	108	72

13. 1 Содержание разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
01	Несобственные интегралы	Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.
02	Функция многих переменных	Непрерывность элементарных функций нескольких переменных. Равномерная непрерывность. Дифференцируемость $f:R^n \rightarrow R^1$ (по Фреше). Частные производные

		<p>$f: R^n \rightarrow R^1$. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Производная по направлению. Градиент. Дифференциал сложной функции. Дифференциалы высшего порядка. Частные производные высшего порядка. Условия равенства смешанных производных. Формулы для вычисления дифференциалов и производных высшего порядка от сложной функции. Неинвариантность формы 2-го дифференциала. Отображение $f: R^n \rightarrow R^m$. Предел. Непрерывность. Дифференциал и производная (Фреше). Их свойства. Дифференциал и производная (Гато). Их свойства. Неявные функции. Существование неявных отображений $f: R^1 \rightarrow R^1$. Существование неявных отображений $f: R^n \rightarrow R^1$, $f: R^n \rightarrow R^m$. Свойства непрерывных отображений $f: R^n \rightarrow R^m$. Свойства матриц Якоби и якобианов отображений. Отображение с не равным нулю якобианом. Существование обратного отображения. Условный экстремум.</p>
03	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	<p>Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля. Умножение рядов. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость предельной функции. Функциональные ряды. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость суммы функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Дифференцируемость и интегрируемость суммы ряда. Аналитические функции. Ряд Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора. Формулы Эйлера. Бесконечные произведения. Необходимый признак сходимости. Связь с рядами. Абсолютная сходимость. Использование компьютера для разложения функции в ряд.</p>
04	Интегралы, зависящие от параметра	<p>Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, её признаки. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.</p>
05	Ряды Фурье и преобразование Фурье	<p>Ряды Фурье. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по элементам ортонормированной системы. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля. Тригонометрический ряд Фурье. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Интеграл Дирихле. Принцип локализации. Поточечная сходимость ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса. Теорема Дирихле. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.</p>

		Частные виды рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье.
06	Интегрирование функции нескольких переменных	Двойной интеграл и интегралы высшей кратности: двойной интеграл, его геометрическая интерпретация и основные свойства; приведение двойного интеграла к повторному; замена переменных в двойном интеграле; понятие об аддитивных функциях области; площадь поверхности; механические и физические приложения двойных интегралов; интегралы высшей кратности; их определение, вычисление и простейшие свойства; несобственные кратные интегралы.

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Предполагается, что, прослушав лекцию, студент ознакомится с рекомендованной литературой из основного списка, затем обратится к источникам, указанным в библиографических списках изученных книг.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов литературы)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<i>Карташев, Алексей Павлович. Математический анализ:/А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – Москва: Лань, 2007. – 447с.: ил.: 21 см. – (Лучшие классические учебники. Математика) (Классическая учебная литература по математике)(Учебники для вузов. Специальная литература). -. ISBN 978-5-8114-0700-2. -<URL:http://e.lanbooks/element.php?pl1 cid=25&pl1 id=178>.</i>
2.	<i>Будаев, Виктор Дмитриевич. Математический анализ.: учебник /В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон;. - Москва: Лань, 2012. - 544 с.: ил.; 22см. – Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства обучающихся по направлению 050200 – «Физико-математическое образование». – Предм. Указ.: с. 532-536. – Имен. Указ.: с. 537. – Библиогр.: с. 531. – ISBN 978-5-8114-1186-3. -<URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?p/1 cid=25& p/1 id=3173>.</i>
3.	<i>Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия. Введение в математический анализ, производная и ее приложения: // И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков, А.Ю. Репин. - Москва: Лань, 2009. – 319 с.; 21 см. – (Учебники для вузов. Специальная литература). -. Библиогр.: с.316. - ISBN 978-5-8114-0751-4. - 3. -<URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?p/1 cid=25& p/1 id=374>.</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
6.	<i>Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 1. – 616 с.</i>
7.	<i>Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 2. – 357 с.</i>
8.	<i>Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа /Л.Д.Кудрявцев. - М.: Высш.шк.1988. – Т.1. – 712 с.</i>
9.	<i>Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа /Л.Д.Кудрявцев. - М.: Высш.шк.1988. – Т.2. – 576 с.</i>
10	<i>Зорич В.А. Математический анализ /В.А.Зорич. – М.:Наука,1984. – Т.1. – 640с.</i>
11	<i>Зорич В.А. Математический анализ /В.А.Зорич. – М.:Наука,1984. – Т.2. – 640с.</i>
12	<i>Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука,1990. – Т.1. – 528 с.</i>
13	<i>Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука,1990. – Т.2. – 543 с.</i>
14	<i>Рудин У. Основы математического анализа /У.Рудин. – М.: Мир,1976. – 319с.</i>
15	<i>Шилов Г.К. Математический анализ (функции одного переменного) /Г.К.Шилов. – М.:Наука,1969. - 528 с.</i>
16	<i>Дьедонне Ж. Основы современного анализа /Ж..Дьедонне. – М.:Мир,1964. – 430 с.</i>
17	<i>Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ,1984. – Часть 1. – 392 с.</i>
18	<i>Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ,1984. – Часть 2. – 346 с.</i>
19	<i>Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу / Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. – М.: Физматлит, 2003. – Т.2. – 504с.</i>
20	<i>Приложения кратных интегралов: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова. – Воронеж: ЛОП ВГУ, 2006. – 23 с.</i>
21	<i>Элементы дифференциального исчисления векторных функций векторного аргумента: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова и др. – Воронеж: ЛОП ВГУ, 2007. – 27 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	<i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета.—(http://www/lib.vsu.ru/)</i>
	<i>Google, Yandex, Rambler</i>

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем. Самостоятельная работа студентов, прежде всего, заключается в изучении литерату-

ры, дополняющей материал, излагаемый на лекции. Необходимо овладеть навыками библиографического поиска для написания реферата, в том числе среди сетевых ресурсов, уметь находить подходящие источники, творчески и критически перерабатывать информацию.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Доклады осуществляются с использованием презентационного оборудования.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий. Доска, мел, тряпка, учебные пособия, компьютер.

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

<p>ОПК-2.1</p> <p>Владеет навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач</p>	<p>Знать: математические методы и модели.</p> <p>Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей.</p> <p>Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач</p>	<p>-Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.</p> <p>-Непрерывность элементарных функций нескольких переменных. Равномерная непрерывность. Дифференцируемость $f: R^n \rightarrow R^1$ (по Фреше). Частные производные $f: R^n \rightarrow R^1$. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Производная по направлению. Градиент. Дифференциал сложной функции. Дифференциалы высшего порядка. Частные производные высшего порядка..</p> <p>- Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная</p>	<p>Контрольная работа</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------

		сходимость, её признаки. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.	
ОПК-2.2 Осуществлять проверку адекватности математических моделей	Знать: математические методы и модели. Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей. Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач	-Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля. Умножение рядов. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость предельной функции. Функциональные ряды. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость суммы	Контрольная работа
ОПК-2.3 Анализировать результаты и оценивать надежность и качество функционирования систем	Знать: математические методы и модели. Уметь: осуществлять проверку адекватности математических моделей. Владеть навыками использования математических методов и моделей для решения исследовательских задач	-Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля. Умножение рядов. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость предельной функции. Функциональные ряды. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегри-	Контрольная работа

		руемость, дифференцируемость суммы.	
Промежуточная аттестация			Вопросы к зачету

19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- Знать: основные положения теории пределов и непрерывных функций, теории числовых и функциональных рядов, теории интегралов, задачи отыскания экстремумов функций; основные теоремы дифференциального и интегрального исчисления для функций одного и нескольких переменных; основы теории дифференциальных уравнений.
- Уметь: определять границы применимости теории и методов математического анализа для решения конкретных прикладных задач; решать основные типы задач на расчеты пределов функций, их дифференцирование и интегрирование, на разложение функций в ряды.
- Владеть: стандартными методами и моделями Математического анализа и применением их в практике; навыками применения стандартных прикладных программ для ЭВМ в целях ускорения решения задач.

19.3 Критерии оценок при сдаче зачета

Зачтено	Знание основных определений, теорем, формул. Умение самостоятельно или с помощью преподавателя решать типовые задачи.
Незачтено	Незнание формул, определений. Неумение решать типовые задачи.

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ и лабораторных работ, содержание которых приведено ниже.. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться средствами связи (включая сеть Интернет) и любыми печатными материалами, ограничение по времени — 90 астрономических минут.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено», «не зачтено». Критерии оценивания результатов обучения при текущей аттестации.

Задача 1. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$1) \begin{cases} y = (x-2)^3, \\ y = 4x-8. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} r = 4 \cos 3\varphi, \\ r = 2 \quad (r \geq 2). \end{cases}$$

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции (ось вращения Ox)

$$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$$

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

Задача 1. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$1) \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} r = 4 \sin 3\varphi, \\ r = 2 \quad (r \geq 2). \end{cases}$$

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции (ось вращения Ox)

$$y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$$

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Задача 1. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$1) \begin{cases} y = \arccos x, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} r = \sqrt{3} \cos \varphi, \\ r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2). \end{cases}$$

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции (ось вращения Ox)

$$y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y-2}, \quad x = 1.$$

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$$

Вариант 1

1. $\int x \operatorname{arctg} x dx$
 2. $\int (e^{3 \sin x} - 1) \cos x dx$
 3. $\int \frac{x^3 dx}{x^3 - 2}$
 4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^4 - 2x + 5}{(x^2 - 1)(x + 1)^2(x^2 + 4x + 9)^2}$
 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$
-

Вариант 2

1. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
 2. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$
 3. $\int \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x^2}$
 4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^2 - x}{(x^2 - 2x)^2(x^2 + x + 2)^2}$
 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{12 + 4x - x^2}}$
-

Вариант 3

1. $\int (1 - 6x)e^{2x} dx$
 2. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$
 3. $\int e^{3 \sin^2 x} \sin 2x dx$
 4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^2 - 6x + 1}{(x^2 - 2x - 3)^2(x^2 + 2x + 2)^2}$
 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$
-

Вариант 4

1. $\int x^2 \ln 2x dx$
 2. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx$
 3. $\int \frac{\sin x dx}{\cos 2x}$
 4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^2 + x - 4}{(x^2 - 6x + 6)^2(x^2 + 2x + 2)^2}$
 5. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$
-

Вариант 5

1. $\int (4x - 2) \cos 2x dx$
 2. $\int \frac{x^2 + \ln^2 x}{x} dx$
 3. $\int \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}$
 4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^2 + 2}{(x^2 + x)^2(x^2 + 3x + 8)^2}$
 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x - x^2}}$
-

Вариант 6

1. $\int x \sin^2 x dx$
2. $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
3. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx$
4. Представить в виде суммы элементарных дробей $\frac{x^3 - x + 1}{(x - 2)(x + 1)(x^2 - x - 2)(x^2 + 6x + 3)^2}$
5. $\int \frac{dx}{5 - 4x - x^2}$

1. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (x - y) dx dy, \text{ где } D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1$$

2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (x + 2y) dx dy, \text{ где } D: y = x, y = 2x, x = 2, x = 3$$

3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ где } D: y = x, x = 0, y = 1, y = 2$$

4. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy, \text{ где } D: x = y^2, x = 0, y = 2$$

5. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (3x + y) dx dy, \text{ где } D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{2}{3}x + 3$$

6. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \text{ где } D: x = 2, y = x, y = \frac{1}{x}$$

7. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy, \text{ где } D: x - 2y = 0, 2x - y = 0, xy = 2$$

8. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{y^3}{x^3} dx dy, \text{ где } D: y = \frac{1}{3}x, y = \sqrt{x}, x \geq 1$$

- $\int (1 + \sqrt{x}) dx$
- $\int x(4x + 12)^8 dx$
- $\int \frac{1}{4x^2 + 5} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$
- $\int \frac{1}{2 - x^2} dx$
- $\int \left(\frac{4}{x^2} - 5x^3 + \cos(3x - 1) + e^{1-5x} \right) dx$

- $\int \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$
- $\int \frac{x-3}{(x-2)(x+3)} dx$
- $\int \frac{3x-1}{x^2+3x+1} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x+2x^2}}$
- $\int xe^{3x} dx$

- $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$
- $\int (5 + x\sqrt{2-4x}) dx$
- $\int \frac{1}{8-7x^2} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{13-16x^2}}$
- $\int \frac{1}{2-5x^2} dx$
- $\int \left(\sin(10x+8) - \frac{5}{x^5} - 5x^9 + \operatorname{tg}(2-3x) \right) dx$

- $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x}} dx$
- $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+8)} dx$
- $\int \frac{3x+4}{x^2-3x+1} dx$
- $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+4x+x^2}}$
- $\int x \sin 3x dx$

- $\int \left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x} \right) dx$
- $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} dx$
- $\int \frac{1}{11+3x^2} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$
- $\int \frac{1}{3+7x^2} dx$
- $\int \left(\operatorname{tg}(9x+8) - \frac{2}{x^4} - 10x^8 + e^{5-3x} \right) dx$

- $\int \frac{3^{\ln x} dx}{x}$
- $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)} dx$
- $\int \frac{x+4}{x^2-5x+8} dx$
- $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$
- $\int x \cos 4x dx$

- $\int \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 dx$
- $\int (x-2)(2x-3)^{10} dx$
- $\int \frac{1}{2+3x^2} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{3-7x^2}}$
- $\int \frac{1}{16+9x^2} dx$
- $\int \left(\cos(9-5x) + \frac{5}{x^7} - 10x^4 + e^{2x-3} \right) dx$

- $\int xe^{-x^2} dx$
- $\int \frac{3-2x}{x(x-5)(x^2+9)} dx$
- $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+8} dx$
- $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3+4x+x^2}}$
- $\int x \sin 5x dx$

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8.$$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в прямоугольной системе координат:

$$y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16.$$

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), & y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0.$$

5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 20}$.

6. Вычислить частные производные и дифференциалы первого и второго порядка функции

$$u = \sin(2x + y) - xy^2.$$

7. Найти частные производные z'_x, z'_y, z''_{xy} от сложной функции $z = f(2x - 3y, x + \sin y)$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в прямоугольной системе координат:

$$y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), & y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x = 2.$$

5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

6. Вычислить частные производные и дифференциалы первого и второго порядка функции

$$u = \cos(x - 6y) - e^x y^3.$$

7. Найти частные производные z'_x, z'_y, z''_{xx} от сложной функции $z = f(2x + \operatorname{tg} y, 4x - 3y)$.

Вариант 3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x+1)^2, y^2 = x+1$.

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в прямоугольной системе координат:

$$y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, y = 10 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2, \quad y = 0.$$

5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2 - 1}$.

6. Вычислить частные производные и дифференциалы первого и второго порядка функции

$$u = e^{3x-5y} - y \sin x.$$

7. Найти частные производные z'_x, z'_y, z''_{yy} от сложной функции $z = f(\ln x + 2y, x^2 - 3y)$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2, y^2 = x-1$.

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в прямоугольной системе координат:

$$y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$$

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

6. Вычислить частные производные и дифференциалы первого и второго порядка функции

$$u = (3x - 2y)^4 - ye^x.$$

7. Найти частные производные z'_x, z'_y, z''_{xy} от сложной функции $z = f(-2x + 3y, 4x - 3y^2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3+2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$$

1. $\int (1 + \sqrt{x}) \sqrt[3]{x} dx$
2. $\int x(4x + 12)^8 dx$
3. $\int \frac{1}{4x^2 + 5} dx$
4. $\int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$
5. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$
6. $\int \cos^2(2x - 3) dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$
8. $\int \frac{1}{2-x^2} dx$
9. $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$
10. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

11. $\int \left(\frac{4}{x^2} - 5x^3 + \cos(3x-1) + e^{1-5x} \right) dx$
12. $\int \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$
13. $\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3}}$
14. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 2}} dx$
15. $\int \frac{x-3}{(x-2)(x+3)} dx$
16. $\int \frac{3x-1}{x^2+3x+1} dx$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x+2x^2}}$
18. $\int \arccos(5x-2) dx$
19. $\int x^2 e^{3x} dx$
20. $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

1. $\int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$
2. $\int (5 + x\sqrt{2-4x}) dx$
3. $\int \frac{1}{8-7x^2} dx$
4. $\int \frac{27^x - 1}{3^x - 1} dx$
5. $\int \frac{x^2}{1-3x^2} dx$
6. $\int \sin^2(3x+8) dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-16x^2}}$
8. $\int \frac{1}{2-5x^2} dx$
9. $\int \frac{dx}{1 + \cos 3x}$
10. $\int x\sqrt{2+3x^2} dx$

11. $\int \left(\sin(10x+8) - \frac{5}{x^5} - 5x^9 + \operatorname{tg}(2-3x) \right) dx$
12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 5}}$
13. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\sin^6 x}} dx$
15. $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+8)} dx$
16. $\int \frac{3x+4}{x^2-3x+1} dx$
17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+4x+x^2}}$
18. $\int \arcsin(3x-1) dx$
19. $\int x^2 \sin 3x dx$
20. $\int e^{-2x} \cos x dx$

Вариант 1

1. В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если

- а) G — треугольник, ограниченный прямыми: $x = 0, y = 0, 2x + 3y = 6$;
 б) G ограничено линиями: $y = x^2, x + y = 2$;

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^2 dx \int_{2x}^{(7x+10)/6} f(x, y) dy$;

3. Вычислить двойной интеграл: $\iint_G \frac{y}{x^2} dx dy, G = \{0 < x, x^3 \leq y \leq x^2\}$;

4. В двойном интеграле перейти к полярным координатам, если область G имеет вид: $G = \{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$;

5. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}, G = \{9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\};$$

Вариант 2

1. В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если

- а) G — четырехугольник, ограниченный прямыми: $x = 0, x = 2, y = x, x + y = 6$;
 б) G ограничено линиями: $x = 0, x = -\sqrt{y}, x = -\sqrt{2-y}$;

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx$;

3. Вычислить двойной интеграл: $\iint_G x^2 y^2 dx dy, G$ ограничено линиями $x = y^2, x = 1$;

4. В двойном интеграле перейти к полярным координатам, если область G имеет вид: $G = \{x^2 + y^2 \leq 9, x + y + 3 \leq 0\}$;

5. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

$$\iint_G xy dx dy, G = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\};$$

Вариант 3

1. В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если

- а) G — треугольник, ограниченный прямыми: $y = 4x, y = -2x, 4x + y = 2$;
 б) G ограничено линиями: $y = 0, x = \sqrt{y}, x + y = 6$;

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_1^2 dx \int_{\ln x}^{3x} f(x, y) dy$;

3. Вычислить двойной интеграл: $\iint_G (x + 2y) dx dy$,

G ограничено прямыми $y = x, y = 2x, x = 2, x = 3$;

4. В двойном интеграле перейти к полярным координатам, если область G имеет вид: $G = \{x \geq y \geq 0, x + y \leq 8\}$;

5. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

$$\iint_G \cos \pi(x^2 + y^2) dx dy, G = \{x^2 + y^2 < 1\};$$

Вариант 4

1. В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если

- а) G — четырехугольник, ограниченный прямыми: $2y = x, 2y = x + 6, y = 2x, y = 2x - 3$;
 б) G ограничено линиями: $x = \sqrt{4 - y^2}, x = \sqrt{4y - y^2}, y = 2$;

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x, y) dy$;

3. Вычислить двойной интеграл: $\iint_G (x^3 + y^3) dx dy, G = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$;

4. В двойном интеграле перейти к полярным координатам, если область G имеет вид: $G = \{x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4x\}$;

5. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}, G = \{4 \leq x^2 + y^2 \leq 36\};$$

20.2 Промежуточная аттестация

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме устного опроса (индивидуального или группового).

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и защиту реферата, позволяющую оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Найти производную функции $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.
2. Сформулировать с помощью неравенств утверждение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b + 0$
3. Предел функции. Определение предела функции в точке по Гейне, по Коши.
4. Формула Тейлора. Вывод.
5. Применяя формулу Ньютона-Лейбница найти $y^{(100)}$, $y = x \operatorname{sh} x$
6. Показать что последовательность $x_n = n^{(-1)^m}$ ($n=1,2,\dots$) не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \rightarrow \infty$.
7. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
8. Производная сложной функции. Полная производная.
9. Доказать, что функция $y = \operatorname{Sign} x$ не имеет первообразной на всей вещественной оси
10. Признак сходимости несобственных интегралов (об ограниченности интегралов), для случая неотрицательной функции.
11. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ положить $x = \sin t$?
12. Применяя формулу Ньютона-Лейбница найти $y^{(20)}$, $y = x^2 e^x$
13. Сформулировать с помощью неравенств утверждение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$
14. Критерий Коши сходимости числовой последовательности
15. Теорема Лагранжа.
16. Методы вычисления определенного интеграла.
17. Инвариантность формы полного дифференциала.
18. Показать, что для функции $f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ оба повторных предела не существуют при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$. Существует ли двойной предел в это же точке?
19. Признаки сходимости числовых рядов (сравнения, Даламбера, Коши, Раабе, интегральный).
20. Определение двойного интеграла. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (Вейерштрасса, Абеля, Дирихле).

21. Определение криволинейного интеграла 1-го рода.

22. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

23. Определение тройного интеграла.

24. Признаки сходимости знакопеременных числовых рядов (Лейбница, Абеля, Дирихле).

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1. Множеством предельных точек множества $X = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ является:

а) $\{0\}$

б) $\{-1, 1\}$

в) пустое множество

г) $\{-1\}$

д) $\{0, 1\}$

2. При каком значении a функция

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & x \leq 0 \\ \frac{e^{ax} - 1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

является непрерывной?

а) 0,5

б) 1

в) 2

г) 3

д) 0

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 x^2 dx$

а) 0,5

б) 1

в) 2

г) 3

д) 0

4. Определить значение производной функции $f(x) = 2 + x - x^2$ в точке $x=0$:

а) 0,5

б) 1

в) 2

г) 3

д) 0

5. Чему равен определенный интеграл $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

а) 0,5

б) 1

- в) 2
- г) 3
- д) 0**

6. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2} dx$ положить $x = \sin t$?

нет

7. Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(-1,1)$ от функции $z=7xy+5x-4y+10$ равно...

Решение: найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x} = 7y+5$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,1) = -2$$

8. Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной функцией $y = \sin x$ равен:

- а) $\frac{\pi}{2}$
- б) $\frac{\pi^2}{2}$**
- в) $\frac{\pi^2}{4}$
- г) π
- д) 0

9. Можно ли разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln x$?

Нет

10. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x^2$

- а) 0,5
- б) 1**
- в) 2
- г) 3
- д) 0

11. Температура тела задана законом $y = x^2 + 3x - 1$. Найти скорость изменения температуры в момент времени 2 сек.

Решение:

Скорость изменения температуры есть производная функции:

$$y' = 2x + 3,$$

далее, в момент времени $x=2$ имеем:

$$y'(2) = 2x + 3 = 7$$

Ответ: 7

12 Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(-1, 1)$ от функции $z=7xy+5x-4y+10$ равно...

Решение: найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x} = 7y + 5;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1) = -2$$

Ответ: -2